Wunsch, pág 51

EJEMPLO 1

Exprese w en términos de z con

$$w(z) = 2x + iy + \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

Solución

Por medio de la ecuación (2.1–1) escribimos de nuevo lo anterior en la forma

$$w(z) = (z + \bar{z}) + \frac{i(z - \bar{z})}{i2} + \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{3z}{2} + \frac{\bar{z}}{2} + \frac{1}{z}.$$ ◀

En general, $w(z)$ tiene parte real y parte imaginaria, y podemos escribir la función en la forma $w(z) = u(z) + iv(z)$, o bien

$$w(z) = u(x, y) + iv(x, y). \tag{2.1–2}$$

donde u y v son funciones reales de las variables x e y. En el ejemplo 1 tenemos

$$u = 2x + \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \text{y} \quad v = y - \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Límite (Wunsch, pág 56-57)

EJEMPLO 1

Como ejemplo simple de esta definición, demuestre que

$$\lim_{z \to i} (z + i) = 2i.$$

Solución

Tenemos $f(z) = z + i$, $f_0 = 2i$, $z_0 = i$. La ecuación (2.2–6) exige que

$$|z + i - 2i| < \varepsilon,$$

o bien, de manera equivalente

$$|z - i| < \varepsilon, \tag{2.2–8}$$

que, según (2.2–7), debe ser válido si

$$0 < |z - i| < \delta. \tag{2.2–9}$$

Tomando un valor de δ igual a, digamos, ε (ésta no es la única posibilidad; por ejemplo, podríamos tomar también $\varepsilon/2$), vemos que la ecuación (2.2–8) se satisface en tanto que z pertenece a la vecindad punteada de i que describe la ecuación (2.2–9). ◀

EJEMPLO 2

Sea $f(z) = \arg z$ (valor principal). Demuestre que $f(z)$ no posee límite sobre la parte negativa del eje real.

Solución

Consideremos un punto z_0 del eje real negativo. Observe la figura 2.2–3. Toda vecindad de este punto contiene valores de $f(z)$ (en el segundo cuadrante) que están arbitrariamente cerca de π y valores de $f(z)$ (en el tercer cuadrante) que se encuentran arbitrariamente cerca de $-\pi$. Aproximándonos a z_0 a lo largo de dos trayectorias distintas, C_1 y C_2, vemos que $\arg z$ tiende hacia dos valores diferentes. Por lo tanto, $\arg z$ no tiene límite en z_0. ◀

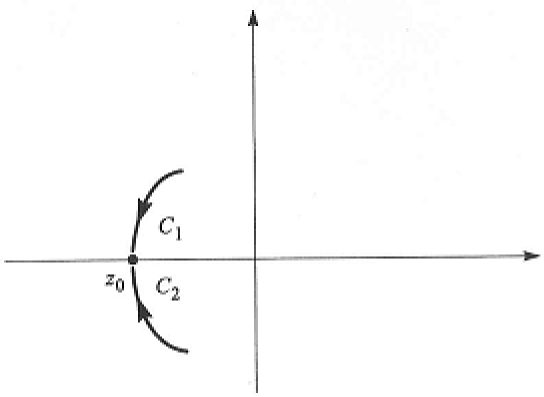

Figura 2.2–3

EJEMPLO 3

Sea

$$f(z) = \frac{x^2 + x}{x + y} + \frac{i(y^2 + y)}{x + y}.$$

Esta función no está definida en $z = 0$. Muestre que no existe $\lim_{z \to 0} f(z)$.

Solución

Aproximémonos al origen a lo largo del eje y. Tomando $x = 0$ en $f(z)$, tenemos

Figura 2.2–3

$$f(z) = \frac{i(y^2 + y)}{y} = i(y + 1).$$

Conforme nos acercamos al origen, esta expresión se aproxima arbitrariamente a i.

Ahora nos acercamos al origen a lo largo del eje x. Tomando $y = 0$, tenemos $f(z) = x + 1$. Conforme nos aproximamos al origen esta expresión tiende hacia 1. Como los dos resultados son distintos, $\lim_{z\to 0} f(z)$ no existe. ◀

Continuidad (Wunsch, pág 59)

EJEMPLO 4

Estudiemos la continuidad en $z = i$ de la función

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^2 + 1}{z - i}, & z \neq i, \\ 3i, & z = i. \end{cases}$$

Solución

Puesto que existe $f(i)$, se satisface el apartado (a) de nuestra definición de continuidad. Para estudiar el apartado (b) es preciso calcular primero $\lim_{z\to i} f(z)$. Como el valor de dicho límite no depende de $f(i)$, estudiaremos primeramente $f(z)$ para $z \neq i$. Factoricemos el numerador del cociente de la ecuación anterior:

$$f(z) = \frac{z^2 + 1}{z - i} = \frac{(z - i)(z + i)}{z - i}, \qquad z \neq i,$$

y dividamos por $z - i$, que aparece tanto en el numerador como en el denominador. (Puesto que $z \neq i$, en ningún momento estamos dividiendo entre 0.) Así pues, $f(z) = z + i$ para $z \neq i$. Podríamos concluir, a partir de este resultado, que $\lim_{z\to i} f(z) = 2i$. De hecho, esto se hizo en forma rigurosa en el ejemplo 1, al que el lector puede volver ahora.

Ya que $f(i) = 3i$ en tanto que $\lim_{z\to i} f(z) = 2i$, es decir, que estos resultados son distintos, la condición (b) de nuestra definición de continuidad no se satisface en $z = i$. Por lo tanto, $f(z)$ es discontinua en $z = i$. No es difícil mostrar que $f(z)$ es continua para todo $z \neq i$. Obsérvese además que una función idéntica a $f(z)$, pero tal que $f(i) = 2i$ sería continua para todo z. ◀

TEOREMA 2

a) Las *sumas*, las *diferencias* y los *productos* de funciones continuas son funciones continuas. El *cociente* de dos funciones continuas es continuo salvo en los puntos en que se anula el denominador.

b) Una función continua de una función continua es una función continua.

c) Sea $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ serán continuas[‡] en todo punto en el que $f(z)$ sea continua. A la inversa, $f(z)$ será continua en todo punto en el que u y v lo sean.

d) Si $f(z)$ es continua en alguna región R, entonces $|f(z)|$ también es continua en R. Si R es acotada y cerrada, existe un número real positivo, digamos M, tal que $|f(z)| \leq M$ para todo z en R. M puede escogerse de tal forma que la igualdad sea válida para al menos un valor de z en R. □